EJERCICIOS DE RECUPERACIÓN

MATEMÁTICAS I

(PARTE 3)

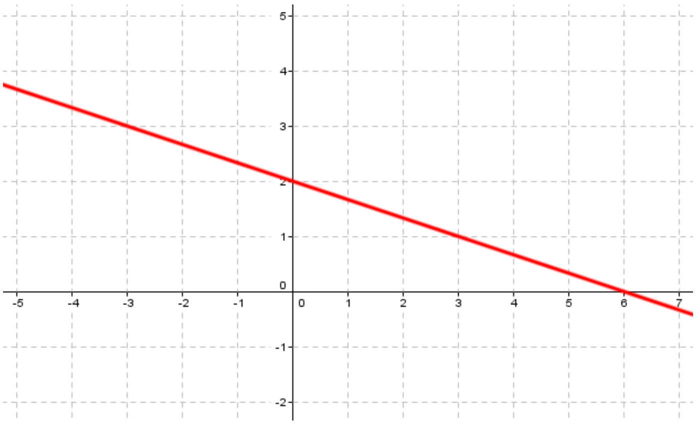
TEMA 8: FUNCIONES

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = \dfrac{9x+1}{-3x+3}$ c) $y = \begin{cases} 1 & si \quad x < 0 \\ -x+2 & si \quad 1 \le x < 4 \\ -2 & si \quad x > 4 \end{cases}$

d) $y = |3x - 2|$ e) $y = 3^x$ f) $y = \log_4 x$

2. Calcula la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de la recta siguiente:



3. Si $f(x) = 3x - 1,\ g(x) = \dfrac{x}{x+1},\ h(x) = 2x^2 + x - 2,\ i(x) = (x+2)^2,$ calcula:

a) $(g\ o\ f)(x)$ b) $(f\ o\ i)(x)$ c) $(h\ o\ f)(x)$ d) $f^{-1}(x)$ e) $g^{-1}(x)$

4. De un cierto modelo de coche se vendieron hasta el mes de febrero 3500 unidades, y hasta el mes de junio 12000 unidades. ¿Cuántas unidades se estima que se vendieron hasta el mes de mayo? ¿Cuántas unidades se estima que se habrán vendido al final del año?

5. Los gastos mensuales de una agencia de viajes por la contratación de "x" paquetes vacacionales son $G = 200 + 30x$, y los ingresos mensuales son $I = 150x - 2x^2$. ¿Cuántos viajes vacacionales deben formalizar para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

6. Dada la gráfica de $f(x)$,

representa:

a) $g(x) = f(x) - 1$ b) $h(x) = f(x - 2)$ c) $i(x) = f(-x)$

TEMA 9: LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

1. Calcula el valor de los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+1)$

   b) $\lim_{x\to -2}(-x^4+3x-1)$

2. Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas:

   a) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & si \quad x\neq 3 \\ k & si \quad x=3 \end{cases}$

   b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x\leq 1 \\ 3-kx^2 & si \quad x>1 \end{cases}$

3. La siguiente función es continua en $[0,+\infty)$. Halla el valor de k que hace que esta afirmación sea cierta.

   $f(x)=\begin{cases} \sqrt{kx} & si \quad 0\leq x\leq 8 \\ \frac{x^2-32}{x-4} & si \quad x>8 \end{cases}$

4. Describe la continuidad de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\begin{cases} -x-3 & si \quad x\leq 0 \\ 2x-3 & si \quad 0<x<3 \\ 3 & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

   b) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x<2 \\ x^2-2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

   c) $f(x)=\begin{cases} \frac{3x}{x-2} & si \quad x<1 \\ 2x-5 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

   d) $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+9 & si \quad x<2 \\ \sqrt{2x-4} & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

   e) $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & si \quad x<4 \\ 2x+5 & si \quad x\geq 5 \end{cases}$

   f) $f(x)=\begin{cases} x^2+8x-1 & si \quad x<-1 \\ 3x & si \quad x>-1 \end{cases}$

5. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican:

   a) $f(x)=\frac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}}$ en $x=0$

   b) $f(x)=\frac{(1+x)^2-1}{x}$ en $x=0$

   c) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ en $x=3$

   d) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+1}$ en $x=2$

6. Calcula el límite cuando $x\to+\infty$ de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}$

   b) $f(x)=\frac{7x-1}{\sqrt[3]{5x^3+4x-2}}$

   c) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x-2}$

   d) $f(x)=\sqrt{18x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{32x^2-3}}$

7. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-x^4}{x^2+1}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-x^4}{x^2-1}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

8. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones (si las tienen):

a) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

TEMA 10: DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - x + 3$ en los siguientes intervalos: [2,3], [2,4], [2,5], [2,6], [3,5], [3,6].

2. Utilizando la definición, calcula la derivada en $x = 2$ y en $x = -1$ de estas funciones:
   a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ b) $f(x) = 2x^2 + x$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x - x^2$ en los puntos de abscisa $x = 2$ y $x = -3$.

4. Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x + 3$ en los puntos donde corta a los ejes X e Y.

5. Encuentra los valores donde se anula la derivada segunda de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ b) $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

6. Calcula la derivada n-ésima, $f^n(x)$, de esta función: $f(x) = \frac{2}{x-1}$

7. Halla la derivada de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 6$ b) $f(x) = x^4$
   c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^5}$
   e) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$ f) $f(x) = x^8$
   g) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ h) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

8. Halla la derivada de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$
   c) $f(x) = \log_2 x$ d) $f(x) = \log_3 x$
   e) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ f) $f(x) = \frac{1}{x} + x$
   g) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3}$ h) $f(x) = 4^x - \operatorname{arctg} x$
   i) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 9$ j) $f(x) = \frac{1}{2x} - 5x$
   k) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$ l) $f(x) = x\sqrt[3]{x^2}$
   m) $f(x) = xe^x$ n) $f(x) = x \operatorname{sen} x$
   o) $f(x) = x \ln x$ p) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$
   q) $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot \operatorname{sen} x$ r) $f(x) = (e^x - x) \cdot \ln x$
   s) $f(x) = 3x^2 \cdot \log_2 x$ t) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$
   u) $f(x) = (\operatorname{sen} x - \cos x) \cdot \operatorname{tg} x$ v) $f(x) = \frac{x+2}{x}$
   w) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x+4}$ x) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$
   y) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$ z) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + 2x}{x-3}$

9. Halla la derivada de las siguientes funciones (utilizando la regla de la cadena):

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

b) $f(x) = (\operatorname{arcsen} x)^3$

c) $f(x) = \ln 4x$

d) $f(x) = (\cos x)^2$

e) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{x-5}\right)$

f) $f(x) = e^{x^2+7x-4}$

g) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$

h) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$

i) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$

j) $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$

k) $f(x) = (x^2 + 1)^{3x}$

l) $f(x) = (3x^2 + 1)^{\ln x}$

TEMA 11: APLICACIONES DE LA DERIVADA. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

1. Dibuja la gráfica de una función creciente en $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$ y decreciente en el resto.

2. Dibuja la gráfica de una función con dos máximos y un mínimo y cinco puntos de corte con los ejes X e Y.

3. Calcula los máximos y los mínimos y estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones:
   a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ b) $f(x) = -x^2 + 6x + 2$
   c) $f(x) = x^3 - 3x^2$ d) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$

4. Considera la siguiente función racional: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
   Estudia su crecimiento y encuentra sus máximos y sus mínimos.

5. Decide dónde son cóncavas y dónde son convexas estas funciones:
   a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

6. Representa gráficamente las siguientes funciones:
   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ b) $f(x) = x^3 - 4x$

7. Determina las asíntotas de estas funciones:
   a) $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

8. Se ha estimado que el gasto de electricidad de una empresa, de 8 a 17 horas, sigue esta función:
   $E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$, donde t pertenece al intervalo $(8{,}17)$.
   a) ¿Cuál es el consumo eléctrico a las 10 horas? ¿Y a las 16 horas?
   b) ¿En qué momento del día es máximo el consumo? ¿Y mínimo?
   c) Determina las horas del día en las que el consumo se incrementa.